ガンマ関数とベータ関数

ゼミでガンマ関数の話題が出たのでまとめてみました.

・ガンマ関数の定義

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

・ガンマ関数の性質

$$\begin{aligned}&(1)\ \Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)\\ &(2)\ \Gamma(s) = (s-1)! \quad (\text{特に}\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi})\\ &(3)\int_0^\infty x^{s-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(s)}{a^s}\end{aligned}$$

性質 (3) を良く使います. 例えば指数分布の n 次のモーメントを簡単に求められます. $f(x)$ をパラメータ λ に従う指数分布の密度関数とすると ($f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$)

$$\begin{aligned}E(X^n) &= \int_0^\infty x^n f(x)dx\\ &= \int_0^\infty \lambda x^n e^{-\lambda x}dx\\ &= \lambda \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}}\\ &= \frac{n!}{\lambda^n}\end{aligned}$$

・ベータ関数の定義

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

・ベータ関数の性質

$$\begin{aligned}&(1)\ \beta(m,n) = \beta(n,m)\\ &(2)\ \beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\end{aligned}$$

性質 (2) は知っておくと便利です.