・教科書 P71 の補助プリント

教科書 P71 の和・差・積・商の分布の求め方の所の補足をします．(1) の所をまず補足します．

まず,

$$P(X+Y \leq x) = E(P(X+Y \leq x|Y))$$

を示します．あとで表記が煩雑になって分かりづらくなる (x が X の実現値と混同しやすい) ので以下では

$$P(X+Y \leq a) = E(P(X+Y \leq a|Y))$$

を示していきます．(つまり，$F_{X+Y}(a)$ について考えています．)

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq a) &= E(1_{X+Y \leq a}) \quad (P(A) = E(1_A) : 1_A \text{は指示関数}) \\ &= E(E(1_{X+Y \leq a}|Y)) \quad (E(E(X|Y)) = E(X)) \\ &= E(P(X+Y \leq a|Y)) \quad (E(1_A|Y) = P(A|Y)) \end{aligned}$$

以上より示せました．次に

$$E(P(X+Y \leq a|Y)) = E(F_X(a-Y))$$

を示します.

$$\begin{aligned} E(P(X+Y \leq a|Y)) &= E(E(1_{X+Y \leq a}|Y)) \\ &= \int_{\Omega_Y} \left[\int_{\Omega_X} 1_{X+Y \leq a} f_{X|Y}(x|y)dx \right] f_Y(y)dy \quad (\Omega_X,\ \Omega_Y \text{は} X, Y \text{の全空間}) \\ &= \int_{\Omega_Y} \left[\int_0^{a-Y} f_{X|Y}(x|y)dx \right] f_Y(y)dy \quad (0 < X \leq a-Y \text{で，指示関数により積分範囲の変更}) \\ &= \int_{\Omega_Y} \left[\int_0^{a-Y} f_X(x)dx \right] f_Y(y)dy \quad (X \text{と} Y \text{は独立なので} f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)) \\ &= \int_{\Omega_Y} F_X(a-Y) f_Y(y)dy \quad \left(= \int_0^a F_X(a-y) f_Y(y)dy \right) \\ &= E(F_X(a-Y)) \end{aligned}$$

これで示されました．次に微分の式変形の補足をします．より一般的に

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(x,y)g(y)dy \right] = f(x,x)g(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)g(y)dy$$

となることを示したいと思います．方法は何通りか考えられるみたいですが，ここでは

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

として考えることで示したいと思います.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(x,y)g(y)dy \right] &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_0^{x+\Delta x} f(x+\Delta x, y)g(y)dy - \int_0^x f(x,y)g(y)dy \right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_0^x \{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)\} g(y)dy + \int_x^{x+\Delta x} f(x+\Delta x, y)g(y)dy \right] \\ &= \int_0^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} g(y)dy + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x+\Delta x, y)g(y)dy \\ &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)g(y)dy + f(x,x)g(x) \end{aligned}$$

最後の等式の二項目は，微小区間での積分を Δx で割ったものの極限は $y = x$ における $f(x,y)$ の値 (つまり $f(x,x)$) に等しいことを使いました．上の証明で一応納得はできるかと思いますが，式変形の途中で積分と極限の操作が可換かどうかという問題もあります.