

教科書 P73 の練習問題 6.9(4) の補足

共分散を条件付き期待値をつかって求めます．ここでは直接求めても良いのですが，せっかくなので．まず

$$E(XY) = E(E(XY|X))$$

を使います．一見厳しい感じですが上手くできます．

$$E(XY|X) = XE(Y|X)$$

です．よって，

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(E(XY|X)) \\ &= \sum_{i=1}^N iE(Y|X=i) \cdot P(X=i) \quad (XE(Y|X)|_{X=i} = iE(Y|X=i), \text{期待値は確率変数} \times \text{確率の総和である}) \\ &= \sum_{i=1}^N i \cdot \frac{\frac{i(N+1)}{2} + \frac{(N+1)(2N+1)}{6}}{i + \frac{N+1}{2}} \cdot \frac{i + \frac{N+1}{2}}{N(N+1)} \quad (\text{上手く分母にあった } i \text{ が消える!}) \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2N} i^2 + \frac{2N+1}{6N} i \right] \\ &= \frac{1}{2N} \cdot \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) + \frac{2N+1}{6N} \cdot \frac{1}{2} N(N+1) \\ &= \frac{1}{6} (2N^2 + 3N + 1) \end{aligned}$$

あとは

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

で計算してください．