・複合分布の補足

複合分布 (compound distribution) の補足をしておきます．条件付き期待値がわかると次のような問題が解けます．（損保数理の範囲です）

問． ある運転手が年間に経験する自動車事故件数 N(確率変数) が $n\ (=0,1,2,\cdots)$ となる確率は，パラメータ λ のポアソン分布 $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ に従い，パラメータ λ もガンマ分布 $f_\lambda(x)=\dfrac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}$ に従うとき，運転手の年間の事故件数の確率関数 $(P(N=n))$ を求めよ．

(解答)

自動車事故件数はパラメータ $\lambda=x$ の条件付きでポアソン分布に従う．これを数式で示すと，

$$P(N=n|\lambda=x)=e^{-x}\frac{x^n}{n!}$$

従って，

$$\begin{aligned}
P(N=n) &= \int_{\Omega_\lambda} P(N=n|\lambda=x)\cdot P(\lambda=x)dx \qquad (P(N=n)\text{ は }P(N=n,\lambda=x)\text{ を }x\text{ で積分すればよい}) \\
&= \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x}\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx} \\
&= \frac{b^a}{n!\Gamma(a)}\int_{x=0}^{x=\infty} x^{n+a-1}e^{-(b+1)x}dx \\
&= \frac{b^a}{n!\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(n+a)}{(b+1)^{n+a}} \qquad (\text{ガンマ関数の性質 (3) を使った}) \\
&= \frac{(n+a-1)!}{n!(a-1)!}\cdot\frac{b^a}{(b+1)^{n+a}} \qquad (\text{ガンマ関数の性質 (2) を使った}) \\
&= {}_{n+a-1}C_n\cdot p^a\cdot(1-p)^n \qquad \left(p=\frac{b}{b+1}\right)
\end{aligned}$$

従って，負の二項分布に従うことが分かる．またガンマ関数の性質は補足プリントを参照してください．