1　標準正規分布と χ 二乗分布

確率変数 X が標準正規分布に従うものとする．このとき $Y = X^2$ が自由度 1 の χ 二乗分布に従うことを示す．

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(0 \le Y \le y) \quad (y \ge 0) \\
&= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}
$$

両辺を y で微分して

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot (-\frac{1}{2\sqrt{y}}) \\
&= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \quad (f_X\text{は偶関数})
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}
\end{aligned}
$$

これは自由度 1 の χ 二乗分布の密度関数である．一般的には自由度 n の χ 二乗分布の密度関数は

$$
f(x,n) = \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}
$$

で表わされる．これは Γ 分布の密度関数に対応している．Γ 分布の密度関数は

$$
Ga(x,a,\nu) = \frac{a^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-ax}
$$

であるから，χ 二乗分布の密度関数は $G(x, 1/2, n/2)$ と考えればよい．また Γ 関数の性質より

$$
\int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(\nu)}{a^\nu}
$$

なので，Γ 分布の係数がこれの逆数となっている．(規格化されている．)

2　再生性

確率変数 X_1, X_2 がそれぞれ自由度 m, n の χ 二乗分布に従うとき $Y = X_1 + X_2$ が自由度 $m+n$ の χ 二乗分布に従うことを示す．畳み込み積分を用いて

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^y f_{X_1}(y-x) f_{X_2}(x) dx \\
&= \int_0^y \frac{(1/2)^{m/2}}{\Gamma(m/2)} (y-x)^{m/2-1} e^{-(y-x)/2} \cdot \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} dx \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \int_0^y \frac{1}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} (y-x)^{m/2-1} x^{n/2-1} dx \quad {}^{*} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot y^{\frac{m}{2}-1} \cdot y^{\frac{n}{2}-1} \cdot y \int_0^1 \frac{1}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} (1-t)^{\frac{m}{2}-1} t^{\frac{n}{2}-1} dt \quad (\frac{x}{y} = t \text{ と変換した.}) \\
&= \frac{\frac{1}{2}^{\frac{m+n}{2}}}{\Gamma(\frac{m+n}{2})} y^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \quad (\text{ベータ関数の積分を規格化した項は 1 である.})
\end{aligned}
$$

よって自由度 $(m+n)$ の χ 二乗分布に従うことが示された．

* $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ を用いた．