

練習問題 2.1(7) 補足

練習問題 2.1(7) で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

が出てきます。これは $\sin x = 0$ の解が $x = 0, \pm k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$) なので

$$\begin{aligned} \sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{k\pi}\right) \cdots (*) \\ &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \end{aligned}$$

と因数分解でき、また $\sin x$ を

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

と Taylor 展開できる。この二つの x^3 の項の係数を比較すると

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

従って

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

と分かります。

(*) のところで無限積に因数分解できるかどうかは複素関数の本を読んでください。(「複素関数入門」(神保道夫) など)