生物統計学

2005 年 3 月 3 日　　2004 年度

問題 1 ある確率変数に関して、母集団分布が正規分布 $N(m, l)$(平均 m 分散 l の正規分布) に従うとする。この母集団からランダムに抽出した標本 (標本サイズ $n = 25$) を用いて帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : m = 0$、対立仮説 $\mathrm{H}_1 : m > 0$ に関して、有意水準 1% で検定を行うとする。これについて、以下の問いに答えよ。

(1) 標本平均を $\overline{x}$ とすれば、帰無仮説 H_0 の棄却域はどのように表せるか。ただし、標準正規分布の上側 0.5% 点、上側 1% 点はそれぞれ 2.576、2.326 である。

(2) 標本平均 $\overline{x}$ が確率変数 $\overline{X}$ の実現値であるとすると、$\overline{X}$ はどのような分布に従うか。

(3) 確率変数 $5\overline{X}$ はどのような分布に従うか,

(4) 帰無仮説 H_0 を棄却する確率は次式 (この検定における検出力関数) で表される。この式中の a を m を使って表せ。

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

ただし，$f(x)$ 標準正規分布の密度関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ である.

(5) $m = 0$ のとき上記の検出力関数はいくつになるか.

問題 2 以下の問いに答えよ.

(1) あるコインを投げたときに表が出る確率 p を推定するために，このコインを n 回投げたところ，k 回表が出た。このとき p の推定値を最尤法により求めよ。

(2) ある要因への曝露に対する生物反応を観察するとき、曝露量を表す変数が連続量で、反応を表す変数が 2 値データであるとき、どのような解析方法が考えられるか。それぞれに簡単な説明を加えて方法を列挙せよ。

(3) 2 変数 X と Y の分散がそれぞれ 1，相関係数が 0.5 のとき、合成得点 $f = 0.8x + 0.6y$ と $g = 0.2x + 0.8y$ の相関係数を求めよ。ただし、x, y はそれぞれ X と Y の平均偏差得点ベクトルとする。

問題 3 以下について、それぞれ生物統計学的観点から数行程度で簡単に説明せよ。

(1) 生物における個体差

(2) 生物学的メカニズムと統計的方法との関係

生物統計学

2004 年 3 月 4 日　　2003 年度

問題 1 (1) 母集団の分布が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき（σ^2 は既知），帰無仮説 $\mu = \mu_0$，対立仮説 $\mu > \mu_0$ の片側検定において，$\mu = \mu_0 + \sigma/4$ のときに検出力を 95% 以上であるようにするには標本の大きさ n をいくらにしたらよいか．ただし，有意水準は 0.01 とする．

(2) 上記において，検出力を 85% 以上，90% 以上，99% 以上とした場合にそれぞれ必要な標本の大きさ n を求め，n と検出力との関係の概形をグラフに描け．

問題 2 ある同一条件下で飼育した同種の 7 匹の実験マウスの生存時間が以下のとおりであったとする．

2.3　　1.6　　1.4　　1.9　　2.8　　1.6　　3.1　　（単位は週）

このとき，以下の問に答えよ．ただし，生存時間の分布は指数分布に従うとする．

(1) 平均生存時間を求めよ．

(2) 指数分布のパラメータを最尤法により推定せよ．

(3) 生後 2.0 週までで実験を打ち切ったとするとき（すなわち左から 1 匹目，5 匹目，7 匹目のマウスは死亡時まで観察できないことになる），指数分布のパラメータを最尤法により推定せよ．

問題 3 ある生物個体に関して 9 個の観察項目（連続量の数値として観測できる）があり，いま，複数の生物個体についてこれらの観察を行ったとする．このとき，「全 9 個の観察項目の合計値」と「9 個のなかからランダムに選んだ 4 個の観察項目の合計値」との相関係数はおよそいくらか．ただし，各観察項目についてはそれぞれ互いに無相関であり，すべての観察項目について分散は等しいと仮定する．

問題 4 以下のテーマの中から 1 つを選んで，100〜300 字程度で解答せよ．

(1) 生物学的研究において個体差をどのように取り扱えばよいか．

(2) 動物実験の結果を人間集団に適用することは可能か．

(3) コンピュータで乱数を発生させる際には何らかの規則性を与えなければならないが，このことはランダムな数字であるということに矛盾しないか．

生物統計学

2003 年 3 月 6 日　　2002 年度

問題 1 (1) 母平均を μ，母分散を σ^2 とする．大きさ n の標本に関する平均値の推定量を $\overline{X}$ とするとき，$|\overline{X}-\mu| < 0.1\sigma$ となる確立を 0.95 以上にするには，n はどのくらいの数が必要か．

(2) 母集団の分布は正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ にしたがい，σ^2 は既知とする．有意水準 0.01 で，帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$，対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ に関する検定を行うとき，第 2 種の誤りの確率が 0.05 以下となるためには，標本数はどのくらい必要か．

問題 2 次の 3 つの問のうち 2 つを選んで 答えよ．

(A) コインを投げて表が出る確率 p を推定するため，コインを n 回投げたところ，表が k 回でた．このとき，p の最尤推定量が k/n となることを示せ．

(B) データの代表値として算術平均を用いることが明らかに誤りを招く場合の例をいくつか挙げよ．

(C) 統計的データに基づいて研究を行う場合，自然科学と社会科学では誤差の生じ方に違いがあるか．あるとすればどのような違いがあるか．

問題 3 3 教科の試験の点数を変数 X(物理)，Y(化学)，Z(生物) とする．この 3 変数間の相関係数が，それぞれ $r_{xy} = \sqrt{3}/2$，$r_{xz} = -1/2$，$r_{yz} = 0$ のとき，以下の問に答えよ．ただし，X, Y, Z の平均偏差得点ベクトルをそれぞれ x, y, z とする．

(1) x, y, z の各ベクトルが互いになす角度はそれぞれいくらか．

(2) (1) の結果から，x, y, z が 2 次元平面にあることを，図を描いて示せ．ただし，各ベクトルの長さは等しいとする．

(3) X, Y, Z 間の相関係数を各成分とする 3×3 の相関係数行列の固有値が 2,1,0 となることを計算によって示せ．なお，相関係数行列の対角成分は全て 1 である．

(4) このとき，主成分分析を行うと，第 1，第 2 の固有値に対応する主成分構造ベクトル (ノルム 1 の固有ベクトルに固有値の平方根をかけたもの) はそれぞれ $a' = (1, \sqrt{3}/2, -1/2)$，$b' = (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ となることを示せ．(注：「統計学ー基礎と応用ー」(現代数学社)p229-230 に記載されている問題 9.1 の解答は誤り)

(5) (4) で得られた主成分構造ベクトルの値 (主成分負荷量) を例のように表として表し，さらに，第 1 主成分を横軸，第 2 主成分を縦軸にして，3 つのベクトル x, y, z の位置を点で表し原点と結んだ図を記せ．この図と (2) で得られた図との関連について述べよ．

表 1　例 (3 変数の主成分負荷量)

	第 1 成分	第 2 成分	平方和
X	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	1
Y	1	0	1
Z	$\sqrt{3}/2$	-1/2	1
平方和	5/2	1/2	3
寄与率 (%)	83.3	16.7	100

注：「統計学ー基礎と応用ー」(現代数学社)p193 表 9.5 より．なお，同テキストに記載さている寄与率の値は誤りで上記の値が正しい．

(6) 第 1 主成分と第 2 主成分の意味するところについてそれぞれ解釈せよ．

生物統計学

2000 年度

問題 1 次の問に答えよ．（それぞれ数百字程度）

(1) 生物学的現象のメカニズムを数学的モデルによって表現しようとする場合，どのようなことが問題となるか.

(2) 多くの場合，われわれは不完全な情報に基づいて様々な判断を下している．このような意思決定を出来るだけ合理的 (あるいは科学的) に行う際にはどのようなことが重要であるか，統計学的な観点から述べよ.

問題 2 白玉と黒球が入った箱があるとする．両方の玉をあわせて 10 個の玉が箱に入っていることが分かっており，しかも次のいずれかであることが確かであるとする．ただし，どちらが正しいかは不明であるとする.

A) 白玉が 7 個で，黒玉が 3 個である.

B) 白玉が 3 個で，黒玉が 7 個である.

そこで，帰無仮説 H_0 として「A が正しい」という仮説を立て，この箱から復元抽出法 * によって 3 個の玉を取り出して帰無仮説 H_0 を検定することにする．このとき，3 個の玉の中に 1 個以上黒球が入っていたら H_0 を棄却することにすると，第 1 種の誤り及び検出力はそれぞれいくらになるか.

* 注) ランダムに取り出した 1 個の玉は，色を確認してから箱に戻す，ということを繰り返す.

問題 3 コインを投げたときの表が出る確率 p を検定するために，このコインを 10 回投げたところ表の出た回数は 3 回であった．このとき p の最尤推定値を求めよ.

問題 4 同一の被験者について観測された 3 変数 X, Y, Z があるとする．このとき次の問に答えよ.

(1) X と Y の相関係数が 0.5，Y と Z の相関係数が 0.5 のとき，X と Z の相関係数の最小値と最大値はいくらになるか.

(2) X と Y の相関係数が -0.5，Y と Z の相関係数が -0.5 のとき，X と Z の相関係数の最小値と最大値はいくらになるか.

(3) X と Y の相関係数が a，Y と X の相関係数が b，X と Z の相関係数が c のとき，

$$1 + 2abc - a^2 - b^2 - c^2 \geq 0$$

となることを示せ．ただし，a, b, c の絶対値はそれぞれ 1 より小さい.

(4) 3 変数の相関係数行列の行列式が 0 のとき，x と y を説明係数，z を基準変数とすると重相関係数はいくらになるか.